3/11/15

* $\left(K = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sup_{S} \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_i}(x,\bar{y}) \right\| \right\} \right)$

<u>Παράδειγμα 2.3-(iv)</u> σελίδα 22

$y_1' = e^x + \sin y_1$ $\qquad S = \{(x,y) : |x| \le 1,\ y_1$ κ' y_2 αυθαίρετα$\}$

$y_2' = x \,\mathrm{Arctg}\, y_2 + \cos y_1$ $\quad , \ \bar{y}(0) = \bar{c}$

$$\bar{f}(x,\bar{y}) = \begin{pmatrix} e^x + \sin y_1 \\ x\,\mathrm{Arctg}\, y_2 + \cos y_1 \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής για οποιαδήποτε y_1, y_2 στο S και $|x| \le 1$.

$\|\bar{y}\| = \max\{|y_1|, |y_2|\}$.

Για να δω εάν ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz, αυτό θα μας το δείξουν οι μερικές παράγωγοι.

$$\sup \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1}(x,\bar{y}) \right\| = \sup \left\| \begin{pmatrix} \cos y_1 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix} \right\| = \max\{|\cos y_1|, |-\sin y_1|\}$$

$$\sup \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1}(x,\bar{y}) \right\| = \sup_{(x,\bar{y}) \in S} \{\max\{|\cos y_1|, |-\sin y_1|\}\} = 1.$$

$$\sup\left|\left\|\frac{\partial \bar f}{\partial y_2}(x,\bar y)\right\|\right| = \sup_{\xi}\left|\left\|\begin{matrix}0\\ x/(1+y_2^2)\end{matrix}\right\|\right| = \sup\left\{\max\left\{|0|, \underbrace{\left|\frac{x}{1+y_2^2}\right|}_{\leq 1}\right\}\right\} =$$

$\rightsquigarrow K = \max\{1,1\} = 1$

*(στο βιβλίο δουλεύει (βρίσκει) με κάποια άλλη σταθερά)

*(Αυτό που μας ενδιαφέρει όμως είναι ότι πληροί την συνθήκη Lipschitz με σταθερά $k=1$ (στο βιβλίο $k=\sqrt{2}$), από το Θ.2 το Π.Α.Τ έχει ακριβώς μια λύση που ορίζεται στο $[-1,1]$ $\forall\, \bar\xi \in \mathbb{R}^2$)

<u>Άσκηση 5</u> σελίδα 28

$y' = \dfrac{\cos y}{1-x^2}$, $y(0) = -2$. Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

*(Για την εφαρμογή του 1ου θεωρήματος πρέπει να έχω κλειστό διάστημα για το x, και για το y δεν γνωρίζω κάτι. Θα δουλέψω με το 2ο με την μερική παράγωγο όμως ο παρ/τής μηδενίζεται. Η παραπάνω άσκηση αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος 3 στο οποίο δεν θα αναφερθούμε)

Θα δειχθεί ότι υπάρχει μια ακριβώς λύση για ένα σημείο στο $(-1,1)$. Έστω $t \in (-1,1)$, αφού t αυθαίρετο τότε συμβαίνει για όλα.

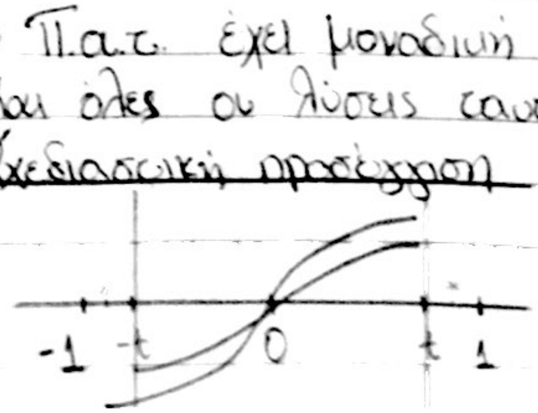
$I_t: [-|t|, |t|]$ $(=[x_0-a, x_0+a])$.

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = \left|\frac{\overbrace{-\sin y}^{\text{φραγμένο από το } 1}}{1-x^2}\right| \leq \frac{1}{1-t^2}$$

$\rightsquigarrow$ Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση στο I_t.

(Και όλες οι λύσεις ταυτίζονται καθώς είναι ταυτόσημα ορισμένες.)

<u>Σχεδιαστική προσέγγιση</u>



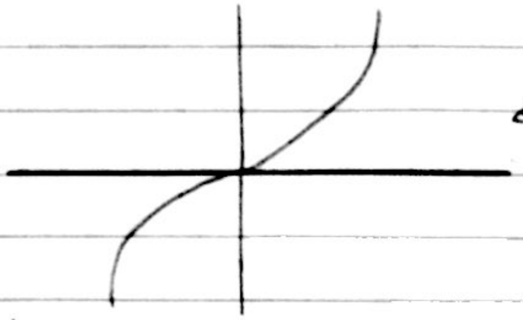
Παράδειγμα 7 σελίδα 27

$y' = 3xy^{1/3} = f(x,y)$

$y(0)=0$

Αυτή έχει τουλάχιστον 2 λύσεις διαφορετικές, τις $y(x)=0$ και $y(x)=x^3$, όπου είναι φανερό. Τώρα ζητείται να δειχθεί ότι η παραπάνω συνάρτηση δεν πληροί την συνθήκη Lipschitz

Σχεδιαστικά οι παραπάνω λύσεις:



Δεν ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz αν την ικανοποιούσε δεν θα συνέβαινε αυτό, δεν είναι μονοσήμαντη.

Αν λοιπόν ικανοποιούσε την συνθήκη Lipschitz θα έπρεπε π.χ. $\forall y,z \in [-1,1]$

$$|f(x,y)-f(x,z)| \le k|y-z| \quad \forall x\in[-1,1] \quad z\in\mathbb{R}.$$

$3|x||\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}| \le k|y-z|$ για y,z κοντά στο 0 και για $x=1$

$|\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}| \le k|y-z| \quad \forall y,z\in\mathbb{R}$ δεν μπορεί να ισχύει $\rightsquigarrow$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{z^2}} \le k \quad \forall y,z\in\mathbb{R}$ * (με συζυγή παράσταση πολλ/ζω)

για $y=z \to 0$, όλο το κλάσμα $\to +\infty$. Στο συγκεκριμένο σύνολο δεν ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz.

Παράδειγμα

$y'=2\sqrt{y}$

$y(0)=0$

$\dfrac{y'}{\sqrt{y}}=2 \qquad \dfrac{dy}{y^{1/2}}=2dx$

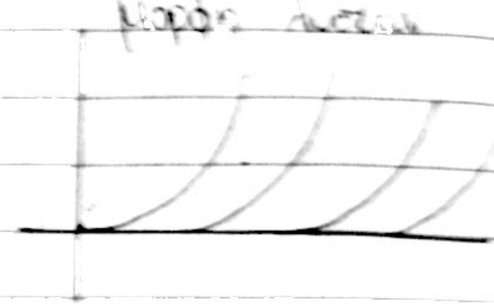
$2\sqrt{y}=2x+c \;/\; y=(x+c)^2 \qquad y=x^2$

$y(0)=0 \Rightarrow \qquad y_0$

υπάρχουν άπειρες λύσεις που δεν φαίνονται

$$y_c(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, c] \\ (x-c)^2 & , x > c \end{cases}$$

μορφή λύσεων



$$y_c'(x) = \begin{cases} 0 \\ 2(x-k) = 2\sqrt{(x-k)^2} = 2\sqrt{y_k} \end{cases}$$

Είναι συνεχώς παρ/μη, άρα λύση

Προφανώς δεν είναι Lipschitz

Παράδειγμα

$xy' = 2(y-1)$

Ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στην γενική λύση $y(x) = cx^2 + 1$ $c \in \mathbb{R}$

(μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων)

για π.α.τ $y(0) = 3$ δεν έχω καμία λύση, για $y(0) = 1$ έχω άπειρες

για την $y' = \frac{2}{x}(y-1)$ $x \neq 0$ δεν μπορεί να έχει Π.Α.Τ.

Άσκηση 30 σελίδα 57

$(x^2-1)y' - 4xy = 0$

Ν.δ.ο ότι είναι λύση της

$$y(x) = \begin{cases} c_1(x^2-1)^2 & , x < -1 \\ c_2(x^2-1)^2 & , |x| \le 1 \\ c_3(x^2-1)^2 & , x > 1 \end{cases}$$

(c_1, c_2, c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές)

διαφορικής εξίσωσης.

Στα σημεία να αλλάζει ο τύπος για τα c_1, c_2, c_3 να αποδείξουμε να είναι συνεχώς παρ/μη. (να ελεγχθεί)

$y' = |y|$, περιπτώσεις για την απόλυτη τιμή

$y(0) = 0$

το αποτέλεσμα είναι:

$$y(x) = \begin{cases} ce^{x} & , c > 0 \\ ce^{-x} & , c < 0 \end{cases}$$

• $y = xf(y') + g(y')$ $\quad f, g \in C(\mathbb{R})$ $\quad f(t) \neq t$

παραγωγίζω

$y' = f(y') + xf'(y')y'' + g'(y')y''$

θέτω $p = y'$: $p = f(p) + xf'(p)\dfrac{dp}{dx} + g(p)\dfrac{dp}{dx}$

$p - f(p) = [xf'(p) + g'(p)]\dfrac{dp}{dx}$ $\quad$ * (θεωρώ την x σαν συνάρτηση του p)

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xf'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$ α' τάξης γραμμική

ώς $x = k(p)$ (1) με αντικατάσταση $y = k(p)f(p) + g(p)$ (2)

(1),(2) μας δίνουν τη λύση με την μορφή παραμέτρου.